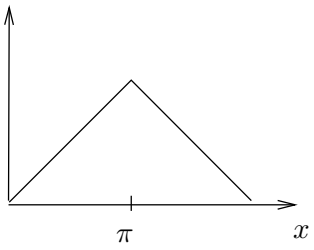
Musterlösung zur Prüfung Mathematik III, Herbst 06,
Dr. P. Thurnheer

Version für WS 04/05

1. Graph von g:



Die Funktion g ist 2π-periodisch, stetig und gerade. Die Fourierreihe ist von der Form : $\frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1} a_k \cos(kx)$. Dabei ist

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx = \pi$$

und für $k \geq 1$, mit partieller Integration

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\Big([\frac{x}{k}\sin(kx)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}\,dx\Big) \\ &= \frac{2}{\pi k^2}\big((-1)^k - 1\big) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

2.

$$u_{xx}(x,t) - tu_t(x,t) = 0 \qquad (*)$$

Diese Gleichung lässt sich mittels einem Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ lösen. Einsetzen ergibt

$$X''T - tXT' = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{X''}{X} = t\frac{T'}{T}.$$

Die linke Seite der letzten Gleichung hängt nur von x ab, die rechte Seite nur von t. Deshalb sind beide Seiten gleich einer Konstante λ:

$$\frac{X''}{X} = \lambda \qquad \text{bzw.} \qquad X'' = \lambda X \qquad (1)$$

$$t\frac{T'}{T} = \lambda \qquad \text{bzw.} \qquad T' = \lambda\frac{T}{t} \qquad (2)$$

Bitte wenden!

Die Gleichung (1) ist linear mit konstanten Koeffizienten. Sie besitzt das charakteristische Polynom $p(l) = l^2 - \lambda$. Wir unterscheiden die drei Fälle

- $\lambda = -k^2 < 0$:
  $p(l)$ hat die Nullstellen $l = \pm ik$, d. h. die Lösung der Gleichung lautet
  $$X(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$
- $\lambda = k^2 > 0$:
  $p(l)$ hat die Nullstellen $l = \pm k$, d. h. die Lösung der Gleichung lautet
  $$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}.$$
- $\lambda = 0$:
  $p(l)$ hat die doppelte Nullstelle $l = 0$, d. h. die Lösung der Gleichung lautet
  $$X(x) = Ax + B.$$

Die Gleichung (2) ist separierbar:

$$\frac{dT}{dt} = \lambda \frac{T}{t} \;\Leftrightarrow\; \int \frac{dT}{T} = \lambda \int \frac{dt}{t} \;\Leftrightarrow\; \ln|T| = \lambda \ln|t| + \tilde{C},$$

womit wir die Lösung

$$T(t) = Ct^{\lambda}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ erhalten. Für $\lambda \neq 0$ erhalten wir die allgemeine Lösung der Gleichung $(*)$ als Überlagerung von Produktlösungen $X(x)T(t)$:

- $\lambda = -k^2 < 0$:
  $$u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k \, e^{ikx} t^{-k^2}.$$
- $\lambda = k^2 > 0$:
  $$u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k \, e^{kx} t^{k^2}.$$
- $\lambda = 0$:
  $$u(x,t) = Ax + B.$$

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \frac{e^{ikx}}{e^{2x}} &= 0, \\
\lim_{x \to \infty} \frac{Ax + B}{e^{2x}} &= 0, \\
\lim_{x \to \infty} \frac{e^{kx}}{e^{2x}} &= \begin{cases} 0 & \text{für } k < 2, \\ 1 & \text{für } k = 2, \\ \infty & \text{für } k > 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Somit erfüllt jede Lösung der Form

$$u(x,t) = Ae^{2x}t^4 + \tilde{u}(x,t)$$

mit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\tilde{u}(x,t)}{e^{2x}} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{u}(x,t) = \sum_{k<2} A_k\, e^{kx}t^{k^2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} B_k\, e^{ikx}t^{-k^2} + Cx + D$$

die Bedingung i). Bedingung ii) besagt dann

$$u(0,1) = A + \tilde{u}(0,1) = 3.$$

Da wir nur **eine** Lösung der Gleichung $(*)$ suchen, können wir $\tilde{u}(x,t) = 0$ annehmen, d. h.

$$u(x,t) = 3e^{2x}t^4.$$

b) Es ist

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{k\geq 1\\ k \text{ ungerade}}} \frac{4}{\pi k^2}\cos(kx).$$

Wir können die Lösung der Gleichung $(*)$ für $\lambda < 0$ mittels der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ umschreiben:

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k\, e^{ikx}t^{-k^2} = \sum_{k\geq 0}(a_k\cos kx + b_k\sin(kx))t^{-k^2}.$$

Somit gilt:

$$u(x,1) = \sum_{k\geq 0}(a_k\cos kx + b_k\sin(kx)) = \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{k\geq 1\\ k \text{ ungerade}}} \frac{4}{\pi k^2}\cos(kx),$$

d. h.

$$b_k = 0, \quad a_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad a_k = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die in x periodisch fortgesetzte Lösung lautet dann

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{k\geq 1\\ k \text{ ungerade}}} \frac{4}{\pi k^2}\cos(kx)t^{-k^2}.$$

Bitte wenden!

3.

$$\frac{u_x(x,t)}{x\ln(x)} - \cot(t)\ u_t(x,t) = 0$$

Wir setzen den Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ in die Gleichung ein:

$$\frac{X'T}{x\ln(x)} - \cot(t)\ XT' = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{X'}{x\ln(x)X} = \cot(t)\ \frac{T'}{T}.$$

Die linke Seite der letzten Gleichung hängt nur von x ab, die rechte Seite nur von t. Deshalb sind beide Seiten gleich einer Konstante λ:

$$\frac{X'}{x\ln(x)X} = \lambda \qquad \text{bzw.} \qquad X' = \lambda\, x\ln(x)X; \qquad (1)$$

$$\cot(t)\ \frac{T'}{T} = \lambda \qquad \text{bzw.} \qquad T' = \lambda\tan(t)T. \qquad (2)$$

Beide Gleichungen sind separierbar:
Mit (1) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= \lambda x\ln(x)X \ \Leftrightarrow\ \int\frac{dX}{X} = \lambda\int \underset{\uparrow}{x}\underset{\downarrow}{\ln(x)}dx \ \Leftrightarrow \\ \ln|X| &= \lambda\left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right) = \lambda\left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right) + \tilde{C}, \end{aligned}$$

womit wir die allgemeine Lösung

$$X(x) = Ce^{\lambda\frac{x^2}{2}\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)}$$

erhalten.
Gleichung (2) ergibt

$$\frac{dT}{dt} = \lambda\tan(t)T \ \Leftrightarrow\ \int\frac{dT}{T} = \lambda\int\tan t dt \ \Leftrightarrow\ \ln|T| = \lambda\int\frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt = -\lambda\ln|\cos(t)| + \tilde{C},$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$T(t) = Ce^{-\lambda\ln|\cos(t)|} = C|\cos(t)|^{-\lambda}, \quad t\in\mathbb{R}\backslash\left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Siehe nächstes Blatt!

1. Sei $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1 \text{ und } z \geq 0\}$ die obere Halbkugel. Wir orientieren K so, dass die z-Komponente des Normalenvektors nicht negativ wird und H so, dass der Normalenvektor in die negative z-Richtung zeigt. Mit dem Satz von Gauss gilt dann:

$$\text{Fluss durch } K \ + \ \text{Fluss durch } H \ = \int_U \text{div}G(x,y,z)dx\,dy\,dz.$$

Es gilt für $(x,y,z) \in U$:

$$\text{div}G(x,y,z) = 3,$$

und da $G(x,y,z)\cdot(0,0,-1) = 0$, verschwindet der Fluss durch H. Es folgt:

$$\text{Fluss durch } K \ = 3 * \frac{2}{3}\pi = 2\pi.$$

2. a) Wir bezeichnen mit γ den stückweise linearen, geschlossenen Pfad $A \to B \to C \to D \to A$ und mit Q das Viereck $ABCD$. Wir bemerken, dass F in einer Umgebung von Q definiert ist. Mit dem Satz von Stokes gilt:

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_Q \text{rot}F\,dx\,dy.$$

Es gilt für alle $(x,y,z) \in Q$:

$$\text{rot}F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x}{y} - \frac{x}{y} \end{pmatrix} = 0.$$

Folglich verschwindet die Arbeit entlang γ.

b) Als Definitionsbereich von F betrachten wir $\Delta = \{y > 0\}$. Wenn F ein Potenzialfeld ist, gibt es eine Funktion V auf Δ mit

$$\begin{aligned} \partial_x V(x,y,z) &= x\ln y, \text{ d.h. } V(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2\ln y + g(y,z), \text{ und} \\ \partial_y V(x,y,z) &= \frac{x^2}{2y}, \text{ d.h. } V(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2\ln y + h(x,z), \text{ und} \\ \partial_z V(x,y,z) &= \cos(z), \text{ d.h. } V(x,y,z) = \sin(z) + u(x,y). \end{aligned}$$

Daraus sieht man, dass $V(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2\ln y + \sin(z)$ ein Potential für F ist.

c) Da F ein Potentialfeld ist, ist die Arbeit von A nach C unabhängig vom Weg und gleich $V(C) - V(A) = \frac{9}{2}\ln(2)$.

Bitte wenden!

3.

$$\frac{u_x(x,t)}{x\ln(x)} - \cot(t)\ u_t(x,t) = 0$$

Wir setzen den Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ in die Gleichung ein:

$$\frac{X'T}{x\ln(x)} - \cot(t)\ XT' = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{X'}{x\ln(x)X} = \cot(t)\ \frac{T'}{T}.$$

Die linke Seite der letzten Gleichung hängt nur von x ab, die rechte Seite nur von t. Deshalb sind beide Seiten gleich einer Konstante λ:

$$\frac{X'}{x\ln(x)X} = \lambda \qquad \text{bzw.} \qquad X' = \lambda\, x\ln(x)X; \qquad (1)$$

$$\cot(t)\ \frac{T'}{T} = \lambda \qquad \text{bzw.} \qquad T' = \lambda\tan(t)T. \qquad (2)$$

Beide Gleichungen sind separierbar:
Mit (1) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= \lambda x\ln(x)X \ \Leftrightarrow\ \int\frac{dX}{X} = \lambda\int \underset{\uparrow}{x}\underset{\downarrow}{\ln(x)}dx \ \Leftrightarrow \\ \ln|X| &= \lambda\left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right) = \lambda\left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right) + \tilde{C}, \end{aligned}$$

womit wir die allgemeine Lösung

$$X(x) = Ce^{\lambda\frac{x^2}{2}\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)}$$

erhalten.
Gleichung (2) ergibt

$$\frac{dT}{dt} = \lambda\tan(t)T \ \Leftrightarrow\ \int\frac{dT}{T} = \lambda\int\tan t dt \ \Leftrightarrow\ \ln|T| = \lambda\int\frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt = -\lambda\ln|\cos(t)| + \tilde{C},$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$T(t) = Ce^{-\lambda\ln|\cos(t)|} = C|\cos(t)|^{-\lambda}, \quad t\in\mathbb{R}\backslash\left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$